ブール代数の公理の意味

ブール代数の公理は非常にシンプルで次の５つしかない。

交換律: $a + b = b+ a$　　$ab = ba$
結合律: $a + (b + c) = (a + b) + c$　　$a(bc) = (ab)c$
分配率: $a + bc = (a + b)(a + c)$　　$a(b + c) = ab + ac$
同一律: $a + 0 = a$　　$a*1 = a$
補元律: $a + a' = 1$　　$aa' =0$

この５つの公理からド・モルガンの法則などの命題論理学のすべての定理を導くことができる。したがって、これらの公理はブール代数の構造の特徴の本質を表している。これらの公理がどんな意味を持っているのか考えてみた。

まず、これらの公理は全て記号の置き換えの規則と考えてよい。抽象的な規則なので、演算子の + や * や ' には具体的な意味はない。0 や 1 ですら具体的な意味の定義はされていないのだ。これらの公式の適用で実際に行われるのは、記号の列の変形でしかない。

これらの記号が意味を持つのは、ブール代数を台集合に適用した時だ。たとば、ブール代数の演算の台集合が 2 値集合 {0, 1} の場合は +, *, ' などは ∨, ∧, ¬などの論理演算に読み替えることができるし、台集合が冪集合のときは、それぞれ、∪、∩、補集合に読み替えることができる。

記号列に上の公理が適用されると同値な記号列の変形が得られるが、その意味は台集合によって変わってくる。たとえば、a' + a'b は上の公理を使って次のように変形できるが、

$$a + a'b = (a + a')(a + b) = 1*(a + b) = a + b$$

これは台集合が 2 値集合 {0, 1} のときは次の真理表が成立することであり、

a b	a'b	a + a'b	a + b
1 1	0	1	1
1 0	0	1	1
0 1	1	1	1
0 0	0	0	0

台集合が冪集合のときは集合 A と B について、

$$A \cup ((I - A) \cap B) = A \cup B$$

であることを示している。記号列の変換規則として定義された公理が、記号列の変換を行うことによって、多様な数学的構造の振る舞いを決定するのには驚かされるが、それだけ、ブール代数の公理として提示された抽象的な定義が有効であるということだ。

それでは、個々の公理の特徴を見てみよう。

交換律、結合律、分配律は、整数の計算規則と同じだ。ただし、ブール代数は分配律が加法と乗法を入れ替えても成立するところが異なっている。これらの演算規則がなければ、普通に行っている整数の計算ができない。

ブール代数の場合の一番の特徴は、加法と乗法の記号を入れ替えても公理が成立するということだ。これはこれらの公理が加法の場合と乗法の場合のペアになっているからだ。公理がペアとなっているので、+ と * の記号の具体的な意味はないのだから、+ と * を入れ替えても同じ公理が得られれば、それらを入れ替えても問題は起きない。

同一律は、ブール代数の右単位元が、+ に対しては 0、* に対しては 1 であることを示している。これもペアになった公理なので、+ と * 、0 と 1 を入れ替えても、公理に変更は起こらない。

このようにブール代数では記号列について + と *、0 と 1 を入れ替えてもその記号列の変形は公理に抵触しない。つまり、定理であれば演算記号を入れ替えた定理が成立することがわかる。これを双対原理という。例えば加算のド・モルガンの定理は次のようになるが、

(a' + b')' = a'b'

この公式の + と * を入れ替えた次の記号列も定理である。

(a'b')' = a' + b'

最後に補元律だが、次のようになっている。

補元律: a + a' = 1　　aa' =0

これは、群の逆元に似ているが、違うものだ。なぜなら、逆元では、

a + 0 = a, a + a' = 0

でならなければならないのに、補元律では

a + 0 = a, a + a' = 1

になるからだ。ブール代数は逆元を持たない代数系だ。

最後にブール代数の順序関係について述べる。順序関係は次のように定義される。

$a < b$ ($a = b$ の場合を含む）は次の等式と同値である。

$a + b = b$

この等式は次の等式と同値だ。

$ab = a$

なぜなら、

$ab = a(a + b) = aa + ab = a + ab = 1a + ab = a(1 + b) = a * 1 = a$

であるからだ。

この半順序関係を導入することで、ブール代数は半順序集合であることがわかる。ブール代数に半順序を導入すると、次のように論理式が事実式である場合も、それからトートロジーを導くことができる。すなわち、

$a < b$ のとき、

$a \to b = a' + b = a' + (a + b) = (a + a') + b = 1 + b = 1$

すなわち、命題論理の論理式の集合はブール代数であるから、命題論理の論理式のトートロジーはブール代数の半順序関係から演繹できることがわかる。

このように、命題論理の論理式の集合はブール代数の公理を満たすので、論理的な演繹は全てブール代数の公理に基づいている。したがって、論理的に考察できるのはその数学的対象がブール代数を満たすときのみである。

追記

＝の意味

ブール代数の公理には = (等号）があるが、この意味は台集合によって異なる。

台集合が 2 値集合 {0, 1} のときは文字通り $a + b = b + a$ は左辺と右辺の真理値が一致していることを表す。台集合が冪集合のときは左辺と右辺の集合が等しいことを意味する。

台集合が命題論理の論理式の集合のときは = (等号）は左辺の論理式と右辺の論理式が要素命題の真理値の組み合わせに関係なく両辺の論理式の真理値が一致することを意味する。これは両方の論理式の真理表が一致することを意味するが、これは等しいというより、2 つの論理式が同値であるということである。

論理式の要素命題は、真理表の対象とする論理式の集合で異なる。A ∧ B という論理式で要素命題がA と B だけの場合、A, B, C, D と A, B 以外の要素命題を含む場合とで真理表の振る舞いは異なるが、A ∧ B と同値な論理式の場合は要素命題 C, D の影響は受けないから要素命題の数にかかわらず真理表が一致する。

したがって、命題論理の論理式の集合が台集合の場合は、公理の ＝(等号）は命題論理同士の同値を意味していることになる。また、要素命題の数は論理式の同値性には影響を与えない。

このようにブール代数の公理では、＝(等号）についても、台集合によって意味が異なっている。

ブール代数の公理は、記号列の変形の規則のみを述べたものである。形式的体系であるが、これは記号論の統語論にあたる。

ブール代数の具体的な実態は台集合によって異なるが、これはブール代数の意味論になる。2 値集合、冪集合、論理式の集合という異なる台集合ではブール代数の記号の意味が変わってくるが、形式的な記号操作は同じだ。

数学的対象の構造とは、公理の統語論を意味すると言えるかもしれない。